

Un invariant remarquable des polytopes simples

Frédéric BOSIO

October 4, 2011

Résumé

Nous introduisons un nouvel entier associé à tout polytope simple et nous étudions ses propriétés.

Abstract

We associate an integer to any simple polytope and we study its properties.

Introduction

Dans les années 1960, J. Milnor a introduit la notion de rang d'une variété (close) M comme le nombre maximum de champs de vecteurs définis dessus, qui commutent, et sont linéairement indépendants en chaque point. Le rang d'une variété est très difficile à calculer en général et bien des questions restent posées à son propos. On sait tout de même que le rang de M est strictement positif si et seulement si la caractéristique d'Euler de M est nulle, ce qui revient à demander que -1 soit racine du polynôme de Poincaré $P_M(X)$ de M , et une conjecture, attribuée à Lima, suggérait que pour une variété de rang au moins 2, -1 fût aussi racine du polynôme P'_M dérivé de P_M . Cette conjecture a été réfutée par Bredon [Br] ; cependant, la valeur en -1 de ce polynôme, qui n'a guère fait l'objet d'étude jusqu'ici, ne semble pas avoir trouvé de signification géométrique précise.

Plus récemment, à partir des années 1990 s'est développée la géométrie torique, au sein de laquelle les variétés moment-angle, particulièrement celles associées à des polytopes simples, occupent une place de choix (voir [D-J], [B-P]). Des liens étroits entre la combinatoire d'un polytope et la géométrie de la variété moment-angle associée ont notamment été établis. Généralement, on trouve des propriétés géométriques d'une variété moment-angle (rang, nombres de Betti, etc...) à partir des propriétés combinatoires du polytope duquel elle provient. Par exemple, le rang d'une telle variété vaut au moins la différence entre le nombre de facettes du polytope et sa dimension (on ignore, à ma connaissance, s'il y a toujours égalité), donc au moins 2 si le polytope considéré n'est pas un simplexe.

Ici, nous allons en quelque sorte dans le sens contraire, en associant un invariant entier à un polytope à partir de la variété moment-angle associée. Nous en calculons la valeur dans les cas les plus communs et décrivons son comportement par rapport à quelques unes des opérations les plus usuelles sur les polytopes simples. Nous terminons par quelques cas particuliers qui nous ont paru intéressants.

Remerciements

L'auteur remercie Laurent Meersseman et le projet COMPLEXE (ANR-08-JCJC-0130-01) pour leur soutien financier.

Les calculs ont été effectués à l'aide du package LVMB de J. Tambour [Ta] ; qu'il en soit aussi remercié.

Rappels

0.1 Polytopes

Notations Dans la suite de cet article, on se fixera un polytope simple P . En fait, l'expression polytope désignera, sauf mention contraire, un polytope combinatoire (c'est-à-dire que deux polytopes géométriques ayant le même poset de faces seront identifiés).

On notera d la dimension de P .

On notera \mathcal{F} l'ensemble des facettes (i.e. des $(d-1)$ -faces de P) et n leur nombre. Pour une partie \mathcal{I} de \mathcal{F} , on note $F_{\mathcal{I}}$ la réunion des facettes de F qui sont dans \mathcal{I} (en fait, seule la topologie de $F_{\mathcal{I}}$ nous intéressera, et elle ne dépend pas de la réalisation de P). Il s'agit d'une partie du bord de P .

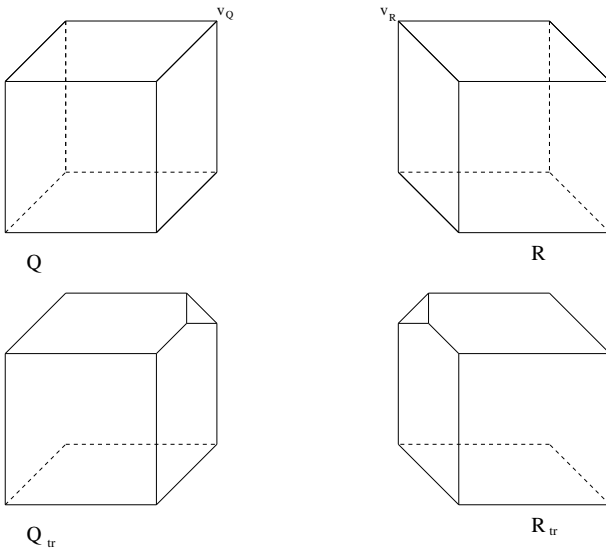
On notera par ailleurs $K_{\mathcal{I}}$ le complexe des faces de I , où les sommets de $K_{\mathcal{I}}$ sont les éléments de \mathcal{I} et où un ensemble de sommets forme une face de $K_{\mathcal{I}}$ si leur intersection est non vide dans P (autrement dit, les faces de $K_{\mathcal{I}}$ correspondent aux faces de P qui sont intersection de facettes toutes dans \mathcal{I}).

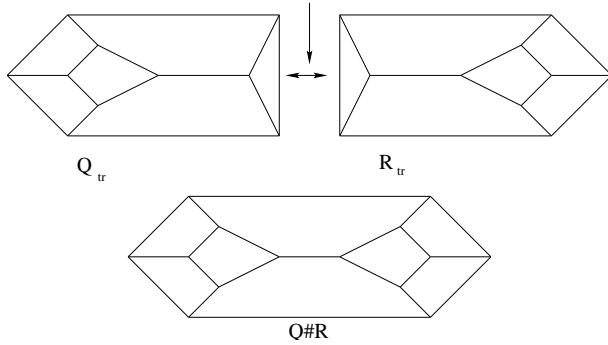
On montre facilement que $K_{\mathcal{I}}$ et $F_{\mathcal{I}}$ ont le même type d'homotopie (voir par ex. [B-M]).

Opérations classiques Nous décrivons ici quelques opérations classiques que l'on réalise sur les polytopes simples.

Produit Si Q et R sont deux polytopes simples, leur produit cartésien est aussi un polytope simple. Si Q (resp. R) est de dimension d_Q (resp d_R) et possède n_Q (resp n_R) facettes, alors $Q \times R$ est de dimension $d_Q + d_R$ et a $n_Q + n_R$ facettes.

Blending (voir par ex. [B-P]) On considère deux polytopes simples Q et R de même dimension d . On choisit un sommet v_Q de Q et un sommet v_R de R . On choisit aussi une correspondance biunivoque $Q_i \mapsto R_i$ entre les facettes Q_1, \dots, Q_d de Q contenant v_Q et les facettes R_1, \dots, R_d de R contenant v_R . On appelle alors blending, ou somme connexe, de Q et de R le polytope $Q \# R$ obtenu en coupant les sommets v_Q et v_R , suivi de transformations projectives réelles de $Q_{\text{tronqué}}$ et $R_{\text{tronqué}}$ rendant possible la dernière opération, qui consiste à "recoller" chaque facette Q_i avec la facette correspondante R_i (combinatoirement, c'est toujours réalisable).



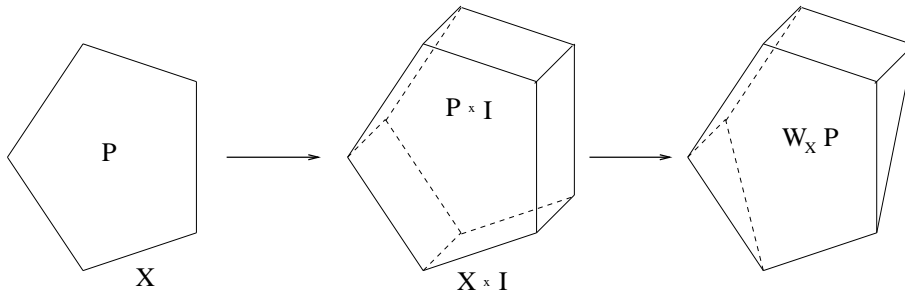


Si Q possède n_Q facettes et R en possède n_R , alors $Q\#R$ en a $n_Q + n_R - d$. Notons tout de même que le polytope obtenu dépend du choix des sommets v_Q et v_R ainsi que de la correspondance entre les facettes. Toutefois, pour certaines opérations, il n'est pas nécessaire de les préciser ; en ce qui concerne l'invariant que nous étudions, ce sera inutile.

Wedging (voir par ex. [K-W]) Si P est un polytope simple et X une facette de P , on construit un polytope simple $W_X P$, appelé wedge (ou book) de P sur la facette X , en écrasant, dans le produit de P par un intervalle, la facette $X \times I$ sur $X \times \{0\}$.

On a une projection naturelle de $W_X P$ sur P . Les deux facettes de $W_X P$ contenant $X \times \{0\}$ seront appelées les facettes principales de $W_X P$; elles sont combinatoirement égales à P et leur projection réalise cette identification. Toute autre facette se projette sur une facette de P autre que X et ces deux facettes se correspondent naturellement.

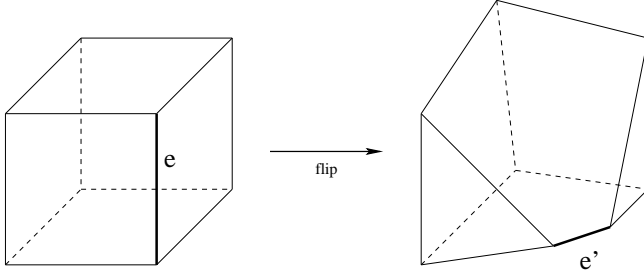
Si P est de dimension d et a n facettes, alors $W_X P$ est de dimension $d + 1$ et a $n + 1$ facettes. Notons toutefois que le polytope obtenu dépend de la face X choisie.



Flipping (voir par ex. [B-M]) Soit T un polytope simple. On suppose qu'on a deux facettes Q et R de T qui sont disjointes et telles qu'il existe un unique sommet v de T qui ne soit ni sur Q ni sur R . On note alors a (resp. b) le nombre d'arêtes de T issues de v qui arrivent sur Q (resp. sur R). On dit alors que R est obtenu à partir de Q par un (a, b) -flip (on a $a + b = \dim T$).

Les deux polytopes Q et R ont même dimension et, si a et b sont > 1 , ils ont même nombre de facettes.

La figure suivante présente un $(2, 2)$ -flip entre une cube et un livre pentagonal :



0.2 Variétés moment-angle

Notations Pour un ensemble fini E , on note T_E le produit $(S^1)^E$ où S^1 est un cercle, habituellement le cercle unité de \mathbb{C} .

On note par ailleurs Z_P le complexe moment-angle associé au polytope simple P (voir [B-P]), qui est une variété canoniquement différentiable. Rappelons que Z_P peut être vu comme plongé dans $\mathbb{C}^{\mathcal{F}}$ où il est muni de l'action naturelle du tore $T_{\mathcal{F}}$ par multiplication sur chaque coordonnée.

Homologie En faisant décrire à \mathcal{I} toutes les parties de \mathcal{F} , on peut décrire l'homologie de Z_P à l'aide des $F_{\mathcal{I}}$ (voir [B-M]).

Pour cela, on considère pour chaque $F_{\mathcal{I}}$ son homologie réduite. A une classe $[c]$ dans $\tilde{H}_i(F_{\mathcal{I}})$, on prend un représentant c qui est un cycle de dimension i dans $F_{\mathcal{I}}$. Dans P (vu ici comme plongé effectivement dans \mathbb{R}^d), ce cycle est un bord et on a donc une chaîne de dimension $i + 1$ dont c est le bord. En saturant cette chaîne par l'action du tore $T_{\mathcal{I}}$, on obtient un cycle de dimension $k + i + 1$ de Z_P , dont la classe ne dépend pas des choix effectués. En fait, toute l'homologie de Z_P est engendrée par ces classes.

N.B. : On considère plus habituellement le dual de Poincaré de cette classe, qui est une classe de cohomologie de dimension $n + d - k - i - 1$. Il est toutefois mieux adapté à notre propos de lui associer cette classe d'homologie.

DÉFINITION 0.1 La construction ci-dessus nous identifie, pour R anneau quelconque, $H_*(Z_P, R)$ avec $\bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}(F_{\mathcal{I}}, R)$.

Si on prend une facette X de P , les classes de $H_*(Z_P, R)$ correspondant aux éléments de $\bigoplus_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{F} \\ X \in \mathcal{I}}} \tilde{H}(F_{\mathcal{I}}, R)$, autrement dit celle provenant des ensembles de facettes contenant X , seront dites X -saturées.

Les classes correspondant au contraire aux éléments de $\bigoplus_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{F} \\ X \notin \mathcal{I}}} \tilde{H}(F_{\mathcal{I}}, R)$, seront dites X -orthogonales.

REMARQUE 1 Par dualité d'Alexander, la dimension de $\tilde{H}(F_{\mathcal{I}}, \mathbb{R})$ est, pour tout \mathcal{I} , égale à la dimension de $\tilde{H}(F_{\mathcal{F} \setminus \mathcal{I}}, \mathbb{R})$. Par sommation, la dimension de l'espace des classes X -saturées est égale à la dimension de l'espace des classes X -orthogonales, donc toutes deux valent la moitié de la dimension de $H_*(Z_P, \mathbb{R})$.

0.3 Identité calculatoire

Nous rappelons ici le résultat suivant, qui nous sera bien utile :

Soit n un entier naturel et $P(X)$ un polynôme de degré $< n$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k P(k) \binom{n}{k} = 0 \quad (1)$$

En effet, en développant $(X + 1)^n$, en le dérivant i fois ($0 \leq i < n$) et en prenant la valeur en -1 , on obtient l'identité pour un polynôme de degré i . D'où le résultat par linéarité.

Dans toute la suite pour tout $n \geq 0$ et k ne vérifiant pas $0 \leq k \leq n$, nous posons $\binom{n}{k} = 0$. On obtient ainsi aussi $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k P(k) \binom{n}{k} = 0$.

1 Définition

Nous introduisons ici notre nouvel invariant, associé à un polytope simple P auquel est associée la variété moment-angle Z_P .

Si M est une variété compacte de dimension k , on appelle $b_i(M)$ (ou simplement b_i s'il n'y a pas d'ambiguïté) son i -ième nombre de Betti, soit $b_i = \dim H^i(M, \mathbb{R})$. On appelle polynôme de Poincaré de M le polynôme donné par $Poinc_M(X) = \sum_{i=0}^k b_i X^i$ (on sait que $b_i = 0$ si $i > k$).

On définit alors :

$$I(P) = Poinc'_{Z_P}(-1) = - \sum_{i=0}^{n+d} (-1)^i \cdot i \cdot b_i \quad (2)$$

Nous allons donner quelques propriétés de cet invariant (nous verrons par rapport à quoi il est invariant) en reliant $I(P)$ à des propriétés combinatoires de P .

2 Propriétés de l'invariant

N.B. : Dans toute la suite, les polytopes considérés seront simples sauf mention contraire.

Certaines des valeurs les plus significatives de l'invariant considéré sont consignées dans le théorème suivant :

THEOREM 2.1 1. Cas d'un simplexe

Notons Δ_d le d -simplexe ($n = d + 1$). On a alors $I(\Delta_d) = 2d + 1$.

Ce cas est extrêmement spécial (nombre de résultats à venir sont faux pour lui), par exemple c'est le seul cas où cet invariant est impair ; aussi dans la suite l'excluons nous très fréquemment.

2. Cas où n et d ont même parité

On suppose ici que n et d ont même parité, autrement dit que $n + d$, ou de façon équivalente $n - d$, est pair. Alors, on a $I(P) = 0$.

3. Cas d'un produit

On suppose ici qu'il existe deux polytopes non triviaux (i.e de dimension ≥ 1) Q et R tels que $P = Q \times R$. Alors $I(P) = 0$.

4. Cas d'un blending

Supposons ici qu'une facette (au moins) de P soit un $d-1$ -simplexe. Alors si n et d sont de parité différentes, et que P n'est pas un simplexe, on a $I(P) = 2$.

Ce cas inclut le cas particulier où P est un polygône à un nombre impair de côtés (triangle excepté).

Ce résultat se généralise aux blendings plus généraux. Si on suppose qu'il existe deux polytopes Q et R (de dimension d) tels que $P = Q \# R$, et que $n-d$ est impair (ce qui revient à demander que les nombres de facettes de Q et de R soient de parités différentes), on a pareillement $I(P) = 2$.

5. Cas où $n-d=3$

On suppose ici que P vérifie $n = d+3$. Son dual P^* est donc un polytope simplicial de dimension d à $d+3$ sommets. On lui associe alors classiquement un polygône à un nombre impair k de côtés via son diagramme de Gale (voir [Gr]). On a alors $I(P) = k-3$.

6. Cas neighbourly dual

On suppose ici que P est de dimension paire $d = 2d'$ et est neighbourly dual, c'est-à-dire que si on prend d' facettes quelconques de P , leur intersection est une d' -face de P (non vide suffit en fait car P est simple).

Alors, si n est impair, et que P n'est pas un simplexe, on a $I(P) = d$.

On peut remarquer que ceci aussi inclut le cas particulier des polygônes à un nombre impair de côtés (triangle excepté).

7. Cas d'un wedge

On suppose ici que P , non simplexe, est obtenu par wedge sur un polytope Q de dimension $d-1$. On a alors $I(P) = I(Q)$.

Cette dernière propriété motive l'appellation d'invariant pour I .

DÉMONSTRATION

- Le cas 1), $P = \Delta_d$ est immédiat. Dans ce cas, Z_{Δ_d} est la sphère de dimension $2d+1$ et le résultat en découle.
- Le cas 2) n'est pas difficile non plus. Rappelons que $n+d$ est la dimension de Z_P . On sait que la caractéristique d'Euler de Z_P est nulle. De plus, Z_P vérifie la dualité de Poincaré (car Z_P est une variété close et orientable) ; on a donc $b_{n+d-i} = b_i$ pour tout i . En effectuant le changement d'indice $j = n+d-i$ dans la somme définissant $I(P)$, on obtient $I(P) = -I(P) + 0$. Donc $I(P)$ est bien nul.
- Le cas 3) est simple. On sait que si P et Q sont deux polytopes, alors $Z_{P \times Q} = Z_P \times Z_Q$. Si on se donne deux variété M et N et qu'on définit $I(M)$ et $I(N)$ par la même formule que ci-dessus, la formule de Künneth (voir par ex. [Ha]) donne $I(M \times N) = I(M) \cdot \chi(N) + \chi(M) \cdot I(N)$. Ainsi, si M et N ont toutes deux une caractéristique d'Euler nulle, alors $I(M \times N) = 0$. C'est en particulier le cas pour Z_P et Z_Q d'où $I(P \times Q) = 0$.

- Le cas 4) est plus compliqué. Il s'inspire de la preuve de la proposition 11.2 de [B-M], mais il faut la généraliser à des blendings plus généraux.

Commençons par le cas particulier où P -non simplexe- possède une facette simpliciale. Ceci équivaut à ce que P soit obtenu en coupant un sommet à un polytope Q , soit encore comme blinding $Q \# \Delta_d$.

On appelle ici m le nombre de facettes de Q et P en a alors $n = m + 1$. La proposition 11.2 de [B-M] nous dit que pour $3 \leq j \leq m + d - 2$, on a :

$$b_i(Z_P) = b_i(Z_Q) + b_{i-1}(Z_Q) + \binom{m-d}{j-2d+1} + \binom{m-d}{i-2}$$

Désignons $b_i(Z_Q)$ par b_i . Le calcul donne alors :

$$\begin{aligned} I(P) &= (-1)^{m+d}(m+d+1) + \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot (b_{i-1} + b_i + \binom{m-d}{i-2d+1} + \binom{m-d}{i-2}) = \\ &= (-1)^{m+d}(m+d+1) + \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot b_{i-1} + \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot b_i + \\ &\quad \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot \binom{m-d}{i-2d+1} + \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot \binom{m-d}{i-2} \end{aligned}$$

Appelons C la dernière de ces sommes, B l'avant dernière et A la somme des deux qui les précèdent.

D'après les propriétés des variétés moment-angle, on a $b_2 = b_{m+d-2} = 0$. D'où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot b_{i-1} + \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot b_i = \\ &= \sum_{k=3}^{m+d-3} (-1)^k \cdot k \cdot 1 \cdot b_k + \sum_{k=3}^{m+d-3} (-1)^{k+1} \cdot k \cdot b_k = \sum_{k=3}^{m+d-3} (-1)^k \cdot b_k \end{aligned}$$

La caractéristique d'Euler de Z_Q est nulle et, comme $b_1 = b_2 = b_{m+d-2} = b_{m+d-1} = 0$ et $b_0 = b_{m+d} = 1$, on trouve $0 = A + 1 + (-1)^{m+d}$, soit $A = -1 + (-1)^{m+d+1}$.

D'autre part, quand i varie de 3 à $m + d - 2$, alors $i - 2d + 1$ varie de $4 - 2d \leq 0$ à $m - d - 1$. D'où

$$B = \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot \binom{m-d}{i-2d+1} = \sum_{k=0}^{m-d-1} (-1)^k \cdot (k+2d-1) \cdot \binom{m-d}{k}$$

Or, d'après l'identité (1), $\sum_{k=0}^{m-d} (-1)^k \cdot (k+2d-1) \cdot \binom{m-d}{k} = 0$, donc $B = 0 - ((-1)^{m-d} \cdot 1 \cdot (m+d-1)) = (-1)^{m+d+1}(m+d-1)$.

Aussi, i varie de 3 à $m + d - 2$, alors $i - 2$ varie de 1 à $m + d - 4 \geq m - d$. D'où

$$C = \sum_{i=3}^{m+d-2} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot \binom{m-d}{i-2} = \sum_{k=1}^{m-d} (-1)^{k+1} \cdot (k+2) \cdot \binom{m-d}{k}$$

Or, $\sum_{k=0}^{m-d} (-1)^{k+1} \cdot (k+2) \cdot \binom{m-d}{k} = 0$, d'où $C = 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned} I(P) &= (-1)^{m+d}(m+d+1) + A + B + C = \\ &= (-1)^{m+d}(m+d+1) + (-1)^{m+d+1}(m+d-1) + (-1 + (-1)^{m+d+1}) + 2 = \\ &= (-1)^{m+d}(m+d+1-m-d+1-1) + (2-1) = 1 + (-1)^{m+d} = 1 - (-1)^{n+d} \end{aligned}$$

Ainsi, si Z_P est de dimension impaire, on a bien $I(P) = 2$.

Passons maintenant à un blending plus général. Nous allons pour commencer fixer un certain nombre de notations.

On se donne un polytope P de dimension d obtenu comme blending de deux polytopes Q et R en des sommets v_Q et v_R . Nous verrons que ni les sommets choisis ni la manière dont est effectué le blending ne jouent de rôle. Nous supposons aussi que ni Q ni R n'est un simplexe (sinon on est ramené au cas ci-dessus).

Notons n_Q (resp. n_R) le nombre de facettes de Q (resp. R). Notons comme d'habitude \mathcal{F} l'ensemble des facettes de P . On note \mathcal{F}_Q (resp. \mathcal{F}_R) à la fois l'ensemble des facettes de Q (resp. R) qui ne contiennent pas le sommet en lequel a été effectué le blending et l'ensemble des facettes de P qui leur correspondent. Notons \mathcal{F}_v à la fois l'ensemble des facettes de P obtenues par recollement d'une facette de Q et d'une de R , ainsi que l'ensemble des facettes de Q ou R contenant le sommet où a été effectué le blending. Ainsi, \mathcal{F} est partitionné par \mathcal{F}_Q , \mathcal{F}_R et \mathcal{F}_v .

En fait, nous ne distinguerons pas une facette de Q ou de R , même dans \mathcal{F}_v , de la facette de P qui lui correspond.

Prenons un ensemble $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ de facettes de P .

On note $F_{\mathcal{I}}$ la réunion des facettes de P qui sont dans \mathcal{I} .

La décomposition de \mathcal{I} dans la partition de \mathcal{F} ci-dessus sera notée $\mathcal{I} = \mathcal{I}_Q \cup \mathcal{I}_R \cup \mathcal{I}_v$.

ATTENTION : On prendra soin de ne pas confondre $F_{\mathcal{I}_Q}$, qui est la réunion des seules facettes situées dans \mathcal{I}_Q avec $F_{\mathcal{I},Q}$, qui est la réunion des facettes de \mathcal{I} qui proviennent de Q , autrement dit $F_{\mathcal{I}_Q \cup \mathcal{I}_v}$. De même pour R .

Nous allons décrire l'homologie (réduite) de $F_{\mathcal{I}}$.

- Si \mathcal{I}_v n'est ni vide ni égal à tout \mathcal{F}_v , alors $F_{\mathcal{I}}$ est "la somme connexe de $F_{\mathcal{I},Q}$ et de $F_{\mathcal{I},R}$ le long de leur frontière" (les composantes réunies étant celles contenant $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_v}$).

L'homologie réduite de $F_{\mathcal{I}}$ est alors la somme directe des homologies réduites de $F_{\mathcal{I},Q}$ et de $F_{\mathcal{I},R}$.

- Si \mathcal{I}_v est vide, alors $F_{\mathcal{I}}$ est la réunion disjointe de $F_{\mathcal{I},Q}$ et de $F_{\mathcal{I},R}$ (qui sont aussi dans ce cas $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_Q}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_R}$).

Si aucun des deux n'est vide, l'homologie réduite de $F_{\mathcal{I}}$ peut alors être vu comme la somme directe de l'homologie réduite de $F_{\mathcal{I},Q}$, de celle de $F_{\mathcal{I},R}$ et de \mathbb{Z} en dimension 0 (non canoniquement plongé dedans, un représentant d'un générateur de ce dernier groupe étant le cycle formé de la différence d'un point de $F_{\mathcal{I},Q}$ et d'un point de $F_{\mathcal{I},R}$, la classe de ce cycle dépendant des composantes des points choisis).

Si un (seul) des deux est vide $F_{\mathcal{I}}$ est soit $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_Q}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_R}$ et son homologie est celle qui correspond. Notons juste que l'homologie réduite de l'autre (l'ensemble vide en a en dimension -1) n'apparaît pas.

- Si, à l'opposé, $\mathcal{I}_v = \mathcal{F}_v$, alors $F_{\mathcal{I}}$ est la somme connexe (en tant que variétés de dimension $d-1$) de $F_{\mathcal{I},Q}$ et de $F_{\mathcal{I},R}$, les endroits de recollement étant des voisinages de v_Q et v_R .

Si on n'a ni $\mathcal{I}_Q = \mathcal{F}_Q$ ni $\mathcal{I}_R = \mathcal{F}_R$, alors l'homologie réduite de $F_{\mathcal{I}}$ est la somme directe de l'homologie réduite de $F_{\mathcal{I},Q}$, de celle de $F_{\mathcal{I},R}$ et de \mathbb{Z} en dimension $d-2$, la sphère sur laquelle est effectué le recollement n'étant alors pas un bord.

Si on a une (seule) des deux égalités \mathcal{I}_Q ou $\mathcal{I}_R = \mathcal{F}_Q$ ou \mathcal{F}_R , alors $F_{\mathcal{I}}$ est obtenu en faisant la somme connexe de \mathcal{F}_Q ou \mathcal{F}_R avec une sphère, ce qui ne modifie pas sa topologie et l'homologie réduite correspond. Notons juste que l'homologie réduite de l'autre (qui est une sphère) n'apparaît pas.

En résumé, on peut décomposer l'homologie de Z_P en une homologie provenant de Q ou de R et une homologie "spéciale" provenant du recollement. Ceci va nous permettre de mener à bien notre calcul.

Prenons par exemple une partie $\mathcal{J} = \mathcal{J}_Q \cup \mathcal{J}_v$ des facettes de Q . On suppose que \mathcal{J} n'est ni vide ni tout $\mathcal{F}_Q \cup \mathcal{F}_v$ et on note j son cardinal. Prenons aussi une classe d'homologie réduite $[c]$ de $F_{\mathcal{J}}$, disons $[c] \in \tilde{H}_l(F_{\mathcal{J}}, \mathbb{Z})$. Cette classe induit une partie de l'homologie de Z_P . En fait, pour chaque partie \mathcal{K} de \mathcal{F}_R dont le cardinal est noté k , elle induit une classe $[c]_{\mathcal{K}}$ de $H_{j+k+l+1}(Z_P, \mathbb{Z})$.

On a de plus supposé que R n'était pas un simplexe, et donc $\text{Card}(\mathcal{F}_R) \geq 2$, ce qui entraîne que :

$$\sum_{\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_R} (-1)^{j+k+l+1} (j+k+l+1) = (-1)^{j+l+1} \sum_{k=0}^{\text{Card}(\mathcal{F}_R)} (-1)^k \binom{\text{Card}(\mathcal{F}_R)}{k} (k + (j+l+1)) = 0$$

En ce sens, l'homologie induite par $[c]$ n'apporte pas de contribution à $I(P)$. Ainsi, toute l'homologie provenant de Q , et de même pour celle provenant de R peut être occultée dans le calcul de $I(P)$.

Autrement dit, $I(P)$ résulte uniquement de l'homologie provenant des classes spéciales.

Prenons $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ et notons i le cardinal de \mathcal{I}_Q , j celui de \mathcal{I}_R .

Dans le cas où \mathcal{I}_v est vide, mais ni \mathcal{I}_Q ni \mathcal{I}_R , alors "la" classe spéciale associée dans Z_P est en degré $i+j+1$.

Par dualité, si $\mathcal{I}_v = \mathcal{F}_v$ mais que $\mathcal{I}_Q \neq \mathcal{F}_Q$ et $\mathcal{I}_R \neq \mathcal{F}_R$, alors la classe spéciale associée dans Z_P est en degré $(n_Q + n_R) - ((\text{Card}(\mathcal{F}_Q) - i) + (\text{Card}(\mathcal{F}_R) - j) + 1) = i + j + 2d - 1$.

Ne reste plus alors à prendre en compte que $H_0(Z_P, \mathbb{Z})$ et $H_{n_Q+n_R}(Z_P, \mathbb{Z})$.

On obtient donc finalement :

$$I(P) = (-1)^{n_Q+n_R+1} (n_Q + n_R) + \sum_{1 \leq i \leq n_Q-d} \sum_{1 \leq j \leq n_R-d} \binom{n_Q-d}{i} \binom{n_R-d}{j} (-1)^{i+j} (i+j+1) +$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} \sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} \binom{n_Q - d}{i} \binom{n_R - d}{j} (-1)^{i+j} (i + j + 2d - 1)$$

La première des deux sommes peut être décomposée en trois par

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} \sum_{1 \leq j \leq n_R - d} \binom{n_Q - d}{i} \binom{n_R - d}{j} (-1)^{i+j} (i + j + 1) = \\ & \left(\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n_R - d} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} \right) + \\ & \left(\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n_R - d} (-1)^j j \binom{n_R - d}{j} \right) + \\ & \left(\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n_R - d} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} \right) \end{aligned}$$

Or, à nouveau d'après l'identité (1), on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} &= \sum_{0 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i i \binom{n_Q - d}{i} = \\ \sum_{0 \leq j \leq n - d} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} &= \sum_{0 \leq j \leq n - d} (-1)^j j \binom{n_R - d}{j} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne donc $\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} = \sum_{1 \leq j \leq n_R - d} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} = -1$ et $\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i i \binom{n_Q - d}{i} = \sum_{0 \leq j \leq n - d} (-1)^j j \binom{n_R - d}{j} = 0$

Au total, $\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} \sum_{1 \leq j \leq n_R - d} \binom{n_Q - d}{i} \binom{n_R - d}{j} (-1)^{i+j} (i + j + 1) = 0 + 0 + (-1)^2 = 1$.

La seconde somme se décompose aussi en trois par :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} \sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} \binom{n_Q - d}{i} \binom{n_R - d}{j} (-1)^{i+j} (i + j + 2d - 1) = \\ & \left(\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} (-1)^i i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} \right) + \\ & \left(\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} (-1)^j j \binom{n_R - d}{j} \right) + \\ & (2d - 1) \left(\sum_{1 \leq i \leq n_Q - d} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n_R - d} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} \right) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} (-1)^i i \binom{n_Q - d}{i} = 0 - (-1)^{n_Q - d} (n_Q - d)$,
 $\sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} (-1)^j \binom{n_R - d}{j} = -(-1)^{n_R - d}$, $\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} (-1)^i \binom{n_Q - d}{i} = -(-1)^{n_Q - d}$ et
 $\sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} (-1)^j j \binom{n_R - d}{j} = -(-1)^{n_R - d} (n_R - d)$. D'où :

$$\sum_{0 \leq i \leq n_Q - d - 1} \sum_{0 \leq j \leq n_R - d - 1} \binom{n_Q - d}{i} \binom{n_R - d}{j} (-1)^{i+j} (i + j + 2d - 1) =$$

$$(-1)^{n_Q + n_R} (n_Q - d) + (-1)^{n_Q + n_R} (n_R - d) + (2d - 1) (-1)^{n_Q + n_R} = (-1)^{n_Q + n_R} (n_Q + n_R - 1)$$

On obtient donc finalement :

$$I(P) = (-1)^{n_Q + n_R + 1} (n_Q + n_R) + 1 + (-1)^{n_Q + n_R} (n_Q + n_R - 1) = 1 - (-1)^{n_Q + n_R}$$

Soit donc bien 2 si $n_Q + n_R$ est impair.

- Le cas 5) est en fait un corollaire direct des cas 3), 6) et 7). En effet, un polytope simple vérifiant $n - d = 3$ est obtenu par des wedges successifs au-dessus, soit du cube si $k = 3$, le polytope étant alors un produit de trois simplexes, soit du dual du polytope cyclique $C(k - 3, k)$ si $k \geq 5$.

Dans le premier cas, le point 3) nous assure que $I(P) = 0 = k - 3$. Dans l'autre cas, le 7) nous dit que $I(P) = I(C^*(k - 3, k))$ et le 6) nous dit que ceci n'est autre que la dimension de ce dernier polytope, soit $I(P) = k - 3$, car il est bien connu qu'un polytope cyclique est neighbourly [Gr].

- Nous traiterons le cas 6) en calculant explicitement les nombre de Betti des variétés moment-angle associés au polytopes neighbourly duaux.

PROPOSITION 2.2 *Soit P un polytope neighbourly dual de dimension $d = 2d'$ à n facettes et soit j tel que $d' < j < n + d'$.*

Alors on a :

$$b_j(Z_P) = \frac{1}{(d')!} \binom{n}{j - d'} \prod_{i=0}^{d'-1} \frac{(j - 2d' + i)(n - j + i)}{n - d' + i}$$

PREUVE

Nous allons ici utiliser les complexes $K_{\mathcal{I}}$ sur les ensembles de facettes de P .

Supposons que \mathcal{I} ne soit ni vide ni égal à \mathcal{F} tout entier. Alors $K_{\mathcal{I}}$ a le type d'homotopie d'un bouquet d'un certain nombre $b_{\mathcal{I}}$ de $(d' - 1)$ -sphères. Or, si on prend un bouquet de $(d' - 1)$ -sphères, au nombre de r , sa caractéristique d'Euler vaut $1 + (-1)^{d'-1} r$ et la dimension de son $H_{d'-1}$ vaut r . D'où $b_{\mathcal{I}} = (-1)^{d'-1} \cdot (\chi(K_{\mathcal{I}}) - 1)$.

Prenons $d' < j < n + d'$. Alors, une partie \mathcal{I} de \mathcal{F} à $j - d'$ éléments n'est ni vide ni tout \mathcal{F} et les classes d'homologie qu'elle induit sont de dimension $(j - d') + (d' - 1) + 1 = j$. De plus, les classes induites par l'ensemble vide ou tout le bord du polytope sont en dimension 0 ou $n + 2d'$, donc pas j . On a donc ainsi :

$$b_j(Z_P) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{F} \\ \#\mathcal{I} = j - d'}} b_{\mathcal{I}} = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{F} \\ \#\mathcal{I} = j - d'}} (-1)^{d'-1} \cdot (\chi(K_{\mathcal{I}}) - 1) =$$

$$(-1)^{d'} \binom{n}{j-d'} + (-1)^{d'-1} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \mathcal{F} \\ \#\mathcal{I}=j-d'}} \chi(K_{\mathcal{I}})$$

Notons cette dernière somme b_j même si on ne suppose plus $d' < j < n + d'$. Ce n'est alors plus forcément $b_j(Z_P)$.

Pour calculer b_j , on regarde combien de fois chaque face de P "apparaît" dans les $K_{\mathcal{I}}$. Notons tout de même qu'une k -face de P est une intersection de $d - k$ facettes et apparaît alors comme $d - k - 1$ -simplexe dans les $K_{\mathcal{I}}$, et que $d - k - 1$ est de parité opposée à k , donc il faut prendre garde au signe.

En fait, pour voir apparaître une k -face F dans un $K_{\mathcal{I}}$, il faut et suffit que \mathcal{I} , qui a $j - d'$ éléments, contienne les $d - k$ facettes dont l'intersection est F . Il y a alors $\binom{n-d+k}{j-d'-d+k}$ soit $\binom{n-d+k}{j-3d'+k}$ complexes $K_{\mathcal{I}}$ où cette face apparaît.

Cela donne ainsi :

$$\begin{aligned} b_j &= (-1)^{d'} \binom{n}{j-d'} + (-1)^{d'-1} \sum_{0 \leq k < d} f_k (-1)^{d-k-1} \binom{n-d+k}{j-3d'+k} = \\ &(-1)^{d'} \binom{n}{j-d'} + (-1)^{d'} \sum_{0 \leq k < 2d'} f_k (-1)^k \binom{n-2d'+k}{j-3d'+k} \end{aligned}$$

Si on pose $f_{2d'} = 1$, cela donne

$$\begin{aligned} b_j &= (-1)^{d'} \sum_{k=0}^{2d'} (-1)^k f_k \binom{n-2d'+k}{j-3d'+k} = \\ &(-1)^{d'} \binom{n}{j-d'} \left(\sum_{k=0}^{2d'} (-1)^k f_k \prod_{i=0}^{2d'-k-1} \frac{j-d'-i}{n-i} \right) \end{aligned}$$

On constate ainsi que b_j est le produit de $\binom{n}{j-d'}$ par la valeur en j d'un polynôme $P_{n,d}(X)$. De plus, le degré de $P_{n,d}(X)$ est majoré par $2d'$.

On sait de plus que pour $0 < j \leq 2d'$, on a $b_j(Z_P) = 0$. Par dualité de Poincaré, pour $n \leq j < n + 2d'$, on a aussi $b_j(Z_P) = 0$. Or, pour $d' < j \leq 2d'$, on a $0 = b_j(Z_P) = b_j = (-1)^{d'} \binom{n}{j-d'} P_{n,d}(j)$. Comme alors $\binom{n}{j-d'}$ n'est pas nul, c'est que $P_{n,d}(j) = 0$.

Le même raisonnement montre aussi que $P_{n,d}(j) = 0$ si $n \leq j < n + d'$.

Ainsi, on a trouvé $2d'$ racines au polynôme $P_{n,d}(X)$. Vu son degré, c'est un multiple de $\prod_{i=0}^{d'-1} (X - 2d' + i)(X - (n + i))$.

Pour trouver lequel, calculons $P_{n,d}(d')$. On a

$P_{n,d}(d') = (-1)^{d'} \sum_{k=0}^{2d'} (-1)^k f_k \prod_{i=0}^{2d'-k-1} \frac{-i}{n-i}$. Si $k < 2d'$, le produit précédent contient le facteur $-i$ pour $i = 0$, donc est nul. Il ne reste donc que $P_{n,d}(d') = (-1)^{d'} (-1)^{2d'} f_{2d'} \cdot 1 = (-1)^{d'} f_d$ et comme $f_d = 1$, on a $P_{n,d}(d') = (-1)^{d'}$.

Or, posons $Q_{n,d}(X) = \frac{1}{(d')!} \prod_{i=0}^{d'-1} \frac{(X-2d'+i)(n-X+i)}{n-d'+i}$. Il est aussi de degré $2d'$, s'annule pour les entiers i tels que $d' < i \leq 2d'$ ou $n \leq i < n + d'$, et :

$$Q_{n,d}(d') = \frac{1}{(d')!} \prod_{i=0}^{d'-1} \frac{(i-d')(n-d'+i)}{n-d'+i} = (-1)^{d'} \frac{1}{(d')!} \prod_{i=0}^{d'-1} (d' - i) = (-1)^{d'} = P_{n,d}(d')$$

Les polynômes $P_{n,d}(X)$ et $Q_{n,d}(X)$ sont donc égaux, d'où la formule. \square

Cette proposition permet alors de calculer $I(P)$. Posons, pour tout entier relatif j , $\tilde{b}_j = \frac{1}{(d')!} \binom{n}{j-d'} \prod_{i=0}^{d'-1} \frac{(j-d+i)(n-j+i)}{n-d'+i}$. Alors, la formule $b_j(Z_P) = \tilde{b}_j$ est en fait valable pour tous les j , excepté les suivants :

- i) $j = 0, j = n + d : \tilde{b}_j = 0$ tandis que $b_j(Z_P) = 1$;
- ii) $j = d', j = n + d' : \tilde{b}_j = (-1)^{d'}$ tandis que $b_j(Z_P) = 0$.

On a de plus $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j j \tilde{b}_j = 0$. En effet, en posant $j' = j - d'$, on constate que \tilde{b}_j est de la forme $Q(j') \binom{n}{j'}$ où Q est un polynôme de degré d . D'où la somme voulue égale au signe près à $\sum_{j' \in \mathbb{Z}} (-1)^{j'} [(X + d')Q](j') \binom{n}{j'}$. Comme $n > d + 1$ car le cas du simplexe est exclus, on a bien $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \tilde{b}_j = 0$.

Finalement, pour calculer $I(P)$, il suffit de calculer sa différence avec cette somme. D'après ce qui précède, et comme d est pair, on a

$$\begin{aligned} I(P) = \\ 0(1-0) - (-1)^{d'} d' (0 - (-1)^{d'}) - (-1)^{n+d'} (n+d') (0 - (-1)^{d'}) - (-1)^{n+d} (n+d) (1-0) = \\ 0 + d' + (-1)^n (n+d') - (-1)^n (n+d) = d' + (-1)^{n+1} d' \end{aligned}$$

Cela donne bien $I(P) = d$ si n est impair.

- Pour le 7), nous remarquons que cela équivaut en un sens à ce qu'une facette d'un polytope (autre que le simplexe) induise "autant d'homologie en dimension paire qu'impair". Nous relierons cela au quotient de Z_P par l'action naturelle du cercle S^1 correspondant à une facette.

Nous n'allons considérer ici que la partie sans torsion de l'homologie des espaces considérés, la torsion n'influençant pas le calcul de $I(W_X P)$.

Posons \mathcal{F}_W l'ensemble des facettes de $W_X P$, \mathcal{F}' l'ensemble $\mathcal{F} \setminus \{X\}$ et \mathcal{F}'_W l'ensemble des facettes non principales de $W_X P$. On a déjà rappelé que les éléments de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'_W se correspondent naturellement.

Considérons une partie \mathcal{J} de \mathcal{F}' dont on note k le cardinal et la partie \mathcal{J}_- de \mathcal{F}'_W qui lui correspond. Il y a quatre parties de \mathcal{F}_W dont l'intersection avec \mathcal{F}'_W est \mathcal{J}_- , à savoir \mathcal{J}_- elle-même, \mathcal{J}_1 et \mathcal{J}_2 qui contiennent chacune une des deux facettes principales F_1 et F_2 et \mathcal{J}_+ qui les contient toutes deux.

Un ensemble $F_{\mathcal{J}_i}, i = 1, 2$ se rétracte par déformation sur F_i , donc est contractile, donc sans homologie réduite.

$F_{\mathcal{J}_-}$ se rétracte par déformation sur sa projection sur P , donc a le même type d'homotopie, et a fortiori la même homologie réduite, que $F_{\mathcal{J}}$.

Une classe de $\tilde{H}_i(F_{\mathcal{J}})$ et la classe de $\tilde{H}_i(F_{\mathcal{J}_-})$ qui lui correspond induisent chacune une classe d'homologie de degré $i + k + 1$, respectivement de $Z_{W_X P}$ et de Z_P .

Considérons maintenant $F_{\mathcal{J}_+}$. C'est, dans le bord de $W_X P$, le complémentaire de $F_{(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{J})_-}$ (plus exactement de son intérieur mais ils ont même type d'homotopie). Par dualité d'Alexander, on a pour tout entier i , $b_i(F_{\mathcal{J}_+}) = b_{n+d-i}(F_{(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{J})_-})$. Or, d'après ce qui précède, c'est aussi égal à $b_{n+d-i-1}(F_{\mathcal{F}' \setminus \mathcal{J}})$ qui, à nouveau par dualité d'Alexander, vaut aussi $b_{i-1}(F_{\mathcal{J} \cup \{X\}})$.

Une classe de $\tilde{H}_{i-1}(F_{\mathcal{J} \cup \{X\}})$ induit une classe d'homologie de degré $(i-1)+(k+1)+1 = i+k+1$ de Z_P , tandis qu'une classe de $\tilde{H}_i(F_{\mathcal{J}_+})$ induit une classe d'homologie de degré $i+(k+2)+1 = i+k+3$ de $Z_X P$.

Ainsi, dans un sens, une classe d'homologie de degré m de Z_P induit une classe d'homologie de degré $m+2$ de $Z_{W_X P}$ si elle est X -saturée et de degré m si elle est X -orthogonale.

Pour tout j , appelons b_j^s la dimension de l'espace des classes X -saturées de degré j et b_j^{ns} la dimension de l'espace des classes X -orthogonales.

On a donc $b_j(Z_P) = b_j^s + b_j^{ns}$ et $b_j(Z_{W_X P}) = b_{j-2}^s + b_j^{ns}$.

Or, on peut relier la notion de X -saturation au quotient Z_P/T_X de Z_P par l'action du cercle T_X . On a en effet la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3 *On considère la surjection canonique π de Z_P sur Z_P/T_X , l'application π^* de $H^*(Z_P/T_X, \mathbb{R})$ dans $H^*(Z_P, \mathbb{R})$ et on appelle A l'image de π^* .*

Alors π^ est injective et on a l'équivalence entre :*

- i) c est dans A ;*
- ii) le dual de Poincaré de c est une classe X -saturée ;*
- iii) c s'annule sur toutes les classes X -saturées.*

PREUVE L'injectivité de l'application résulte directement du fait que Z_P/T_X se plonge dans Z_P en tant que retract. Ceci peut, par exemple, se voir en remarquant que l'action naturelle de S^1 sur \mathbb{C}^n par rotation sur la première coordonnée a un espace d'orbites qui s'identifie à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{n-1}$, donc est un retract de \mathbb{C}^n , et l'action sur Z_P en est une sous-action.

Prenons une classe c dans A , $c = \pi^*(c')$ où $c' \in H^k(Z_P/T_X, \mathbb{R})$ ainsi qu'un cycle saturé $\alpha \in H_k(Z_P, \mathbb{R})$. On a alors $c(\alpha) = c'(\pi_* \alpha)$ et $\pi_* \alpha$ est "de dimension $(k-1)$ ", d'où $c'(\pi_* \alpha) = 0$.

Soit maintenant une classe de cohomologie dont le dual est X -saturé. Si on l'applique à une autre classe X -saturée, on obtient l'intersection (numérique) de deux classes X -saturées. Or, l'intersection homologique de deux classes X -saturées étant elle-même X -saturée, leur intersection numérique est nulle.

Pour voir maintenant qu'un cocycle qui s'annule sur toute classe X -saturée est dans A et est le dual d'un cycle saturé, on peut se baser sur la dimension de ces espaces.

La dimension de A est la moitié de la dimension de $H^*(Z_P, \mathbb{R})$. De même, d'après la remarque 1, la dimension de l'espace des classes X -saturées est aussi la moitié de la dimension de $H^*(Z_P, \mathbb{R})$. C'est également la dimension de l'espace des classes qui s'annulent sur toutes les classes X -saturées.

On en déduit que ces trois espaces sont les mêmes. \square

Cette proposition nous permet d'affirmer que la dimension de l'espace des classes X -saturées de degré j de Z_P est égale à la dimension des classes de degré $n+d-j$ de A , donc aussi à la dimension des classes de degré $n+d-j$ de $H^*(Z_P/T_X, \mathbb{R})$, soit $b_j^s = b_{n+d-j}(Z_P/T_X)$.

On obtient alors :

$$b_j(Z_{W_X P}) = b_j^s + b_{j-2}^s = b_j(Z_P) - b_j^s + b_{n+d-j+2}(Z_P/T_X) =$$

$$b_j(Z_P) - b_{n+d-j}(Z_P/T_X) + b_{n+d-j+2}(Z_P/T_X)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} I(W_X P) &= - \sum_{j=0}^{n+d+2} (-1)^j j \cdot b_j(Z_{W_X P}) = \\ &= - \sum_{j=0}^{n+d+2} (-1)^j j \cdot b_j(Z_P) + \sum_{j=0}^{n+d+2} (-1)^j j \cdot b_{n+d-j}(Z_P/T_X) - \\ &\quad \sum_{j=0}^{n+d+2} (-1)^j j \cdot b_{n+d-j+2}(Z_P/T_X) = \\ &= I(P) + \sum_{j'=-2}^{n+d} (-1)^{n+d-j'} (n+d-j') \cdot b_{j'}(Z_P/T_X) - \\ &\quad \sum_{j'=0}^{n+d+2} (-1)^{n+d-j'+2} (n+d-j'+2) \cdot b_{j'}(Z_P/T_X) = \\ &= I(P) + \sum_{j'=0}^{n+d} (-1)^{n+d-j'} (-2) \cdot b_{j'}(Z_P/T_X) = I(P) + 2(-1)^{n+d+1} \sum_{i=0}^{n+d} (-1)^i b_i(Z_P/T_X) = \\ &= I(P) + 2(-1)^{n+d+1} \chi(Z_P/T_X) \end{aligned}$$

Or, si P n'est pas un simplexe, le cercle diagonal du tore $T_{\mathcal{F} \setminus \{X\}}$ agit librement sur Z_P/T_X , ce qui implique $\chi(Z_P/T_X) = 0$.

On obtient donc bien $I(W_X P) = I(P)$.

CQFD

3 Exemples divers

Nous donnons ici différents exemples qui illustrent aussi le comportement de notre invariant.

EXEMPLE 1 Une question naturelle au vu des propriétés précédentes est de savoir si on a $I(P) \geq 0$ pour tous les polytopes simples. Ce n'est pas le cas, et nous présentons deux contre-exemples. Le premier avec $d = 3$, le second avec $n - d = 5$, ce qui est dans chaque cas la valeur minimale.

Soit P l'octaèdre tronqué, ou permutaèdre de dimension 3 (il possède 14 facettes). Le calcul de l'homologie de Z_P nous donne $I(P) = -2$.

Soit Q le polytope obtenu de la façon suivante : On place un hypercube de dimension 4 en position de "diamant", i.e. avec un sommet en haut et un sommet en bas. On le coupe "horizontalement" par un hyperplan H situé juste au-dessous de son hyperplan milieu (i.e. l'hyperplan médiateur des deux sommets susmentionnés). Le polytope Q est alors la partie supérieure de l'hypercube (celle située au-dessus de H). On constate facilement que H sectionne toutes les facettes de l'hypercube, ce qui fait que Q possède 9 facettes.

Le calcul de l'homologie de Z_Q nous fournit $I(Q) = -4$.

EXEMPLE 2 Une remarque sur $I(P)$, qui est donné comme forme linéaire sur l'ensemble des nombres de Betti d'une variété, est que si on prend une suite (forcément finie) de polytopes P_0, \dots, P_k dont les nombres de Betti de chaque degré sont en progression arithmétique, alors leurs invariants I_0, \dots, I_k sont aussi en progression arithmétique.

Un exemple peut être fourni par des polytopes obtenus à partir d'hypercubes en flippant des arêtes. Plus précisément, prenons $d \geq 4$ et posons P_0 l'hypercube de dimension d , qui a $2d$ facettes. Il est possible de construire des polytopes P_1, \dots, P_d tels que chaque $P_i, i \geq 1$ est obtenu à partir de P_{i-1} en flippant une arête. On peut voir que les nombres de Betti des Z_{P_i} ne dépendent pas des arêtes flippées, et sont en progression arithmétique [Bo]. (Attention, s'il est nécessaires que deux arêtes flippées quelconques soient disjointes et non parallèles, on n'obtient pas forcément un polytope combinatoire en flippant n'importe lesquelles vérifiant cela). Leurs invariants sont donc aussi en progression arithmétique. En fait, on peut voir que si d est impair, alors $I_i = 2i$ pour tout $0 \leq i \leq d$ (si d est pair I_i est forcément nul).

D'autres exemples peuvent être obtenus en flippant des arêtes à partir du polytope Q ci-dessus, ou en flippant d'autres simplexes à partir de produits, etc...

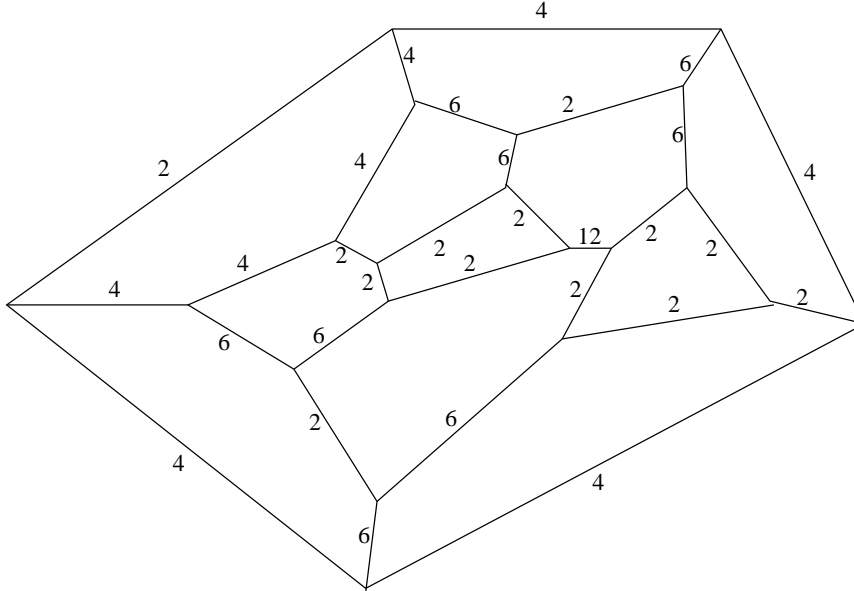
EXEMPLE 3 On peut d'ailleurs se demander s'il est possible d'établir un rapport entre l'invariant d'un polytope P et celui d'un polytope obtenu à partir de P par une transformation élémentaire (i.e. un unique flip).

Dans le cas d'un $(1, d)$ -flip, on rajoute ou enlève une facette et il est donc forcé que l'un des deux polytopes ait un invariant nul, quel que soit la valeur de l'invariant de l'autre.

Dans d'autres cas de flips, les invariants ont-ils forcément des valeurs proches ?

Prenons l'exemple du dodécaèdre D . Le calcul nous fournit $I(D) = 12$. Appelons D' le polytope obtenu à partir de D en flippant une arête (D' ne dépend pas de l'arête flippée). Le calcul nous fournit $I(D') = 6$. Quelles valeurs obtient-on après le flip d'une arête de D' (remarquons que toutes peuvent le subir) ?

On sait déjà qu'on obtiendra 12 en flippant celle qui vient d'apparaître (on revient au dodécaèdre), et qu'on obtiendra 2 si on flippe une arête d'un quadrilatère (car celui-ci sera transformé en triangle à l'issue du flip). Le diagramme suivant récapitule les valeurs obtenues après flips des différentes arêtes de D' :



On constate qu'en dehors du cas très particulier où on revient au dodécaèdre, l'invariant

ne dépasse pas 6. Ceci invite à penser que "en règle générale, un polyèdre (limitons-nous à la dimension 3) aura un invariant positif mais assez petit", et nous incite à témoigner un intérêt particulier aux exceptions.

4 Questions

Nous terminons notre propos par quelques questions concernant $I(P)$.

La première, et sans doute la plus importante, est la dépendance ou non de $I(P)$ par rapport au corps de base. Si $I(P)$ n'en dépend pas, l'appellation d'invariant pour I est encore plus justifiée, et cela renforce encore l'intimité du lien entre $I(P)$ et la combinatoire de P .

En fait, demander que $I(P)$ soit indépendant du corps de base revient à demander que "pour tout nombre p premier, l'homologie de Z_P (à coefficients dans \mathbb{Z}) ait autant de p -torsion en dimension paire qu'en dimension impaire". Or on sait actuellement très peu de choses concernant la torsion dans l'homologie des variétés moment-angle.

Une autre question naturelle est de trouver quelles peuvent être les valeurs que prend cet invariant, notamment en fonction de n et d . D'abord, est-il borné ou non lorsque d est fixé ? C'est le cas pour $d = 2$ mais on peut avoir tendance à penser le contraire pour $d \geq 3$; toutefois, on ignore la réponse exacte. Autre question, a-t-on dans tous les cas $|I(P)| \leq n + d$? Remarquons que, pour de simples raisons de parité, l'égalité n'a lieu que dans le cas des simplexes. On peut aussi chercher à décrire les polytopes qui réalisent les extrema de $I(P)$ en fonction de n et d .

On peut aussi chercher des bornes sur $I(P)$ en fonction du rang de Betti total $r(Z_P)$ de la variété (i.e. la dimension de $H^*(Z_P, \mathbb{R})$, soit encore la somme de ses nombres de Betti). Par exemple, pour $n - d = 3$, on a $I(P) = \frac{1}{2}r(Z_P) - 4$. Il semble très raisonnable de conjecturer qu'on a $|I(P)| \leq \frac{1}{2}r(Z_P) - 4$ pour tout polytope simple autre qu'un simplexe.

Conclusion

Toutes ces propriétés attestent bien de l'intérêt de l'invariant $I(P)$. Il semble remarquable qu'en dépit de sa définition plutôt géométrique, il soit intimement lié à la combinatoire du polytope P , et il est frappant qu'il ait un comportement aussi simple vis-à-vis des opérations usuelles sur les polytopes simples. Toutefois, on aurait fort envie de lui trouver une signification plus précise de nature combinatoire, géométrique ou autre, et, dans le même ordre d'idées, une méthode qui puisse permettre de calculer sa valeur pour des polytopes assez généraux auxquels la variété moment-angle associée a des nombres de Betti dont le calcul semble hors de portée.

En tout cas, il y a fort à parier que ce nouvel invariant n'a pas encore livré tous ses secrets.

References

- [B-M] F. Bosio and L. Meersseman *Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes*
Acta math., vol 197, no 1 (2006), p. 53-127

- [Bo] F. Bosio *On diffeomorphic moment-angle manifolds*
En préparation
- [B-P] V.M. Buchstaber and T.E. Panov *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*
University Lecture Series, vol. 24 , AMS, Providence, RI (2002)
- [Br] G.E.Bredon *Counterexamples on the rank of a manifold*
Proceedings of the AMS, vol. 27, no. 3 (1971), p. 592-594
- [D-J] M. Davis and T. Januskiewicz *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*
Duke math. journal, vol 62, no 2 (1991), p. 417-451
- [Gr] B. Grünbaum *Convex polytopes*, 2nde édition
Graduate texts in mathematics (221). Springer, 2003
- [Ha] A. Hatcher *Algebraic topology*
Cambridge University Press, 2002
- [K-W] V. Klee and D.W. Walkup *The d-step conjecture for polyhedra of dimension < 6*
Acta math., vol 117 (1967), p. 53-78
- [Ta] J. Tambour ; package lvmb.mws.
Téléchargeable à l'adresse suivante :
<http://math.u-bourgogne.fr/IMB/tambour/Programmes.htm>

Bosio Frédéric
 Université de Poitiers
 UFR Sciences SP2MI
 Département de Mathématiques
 UMR CNRS 6086
 Teleport 2
 Boulevard Marie et Pierre Curie
 BP 30179
 86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX
 e-mail : bosio@math.univ-poitiers.fr